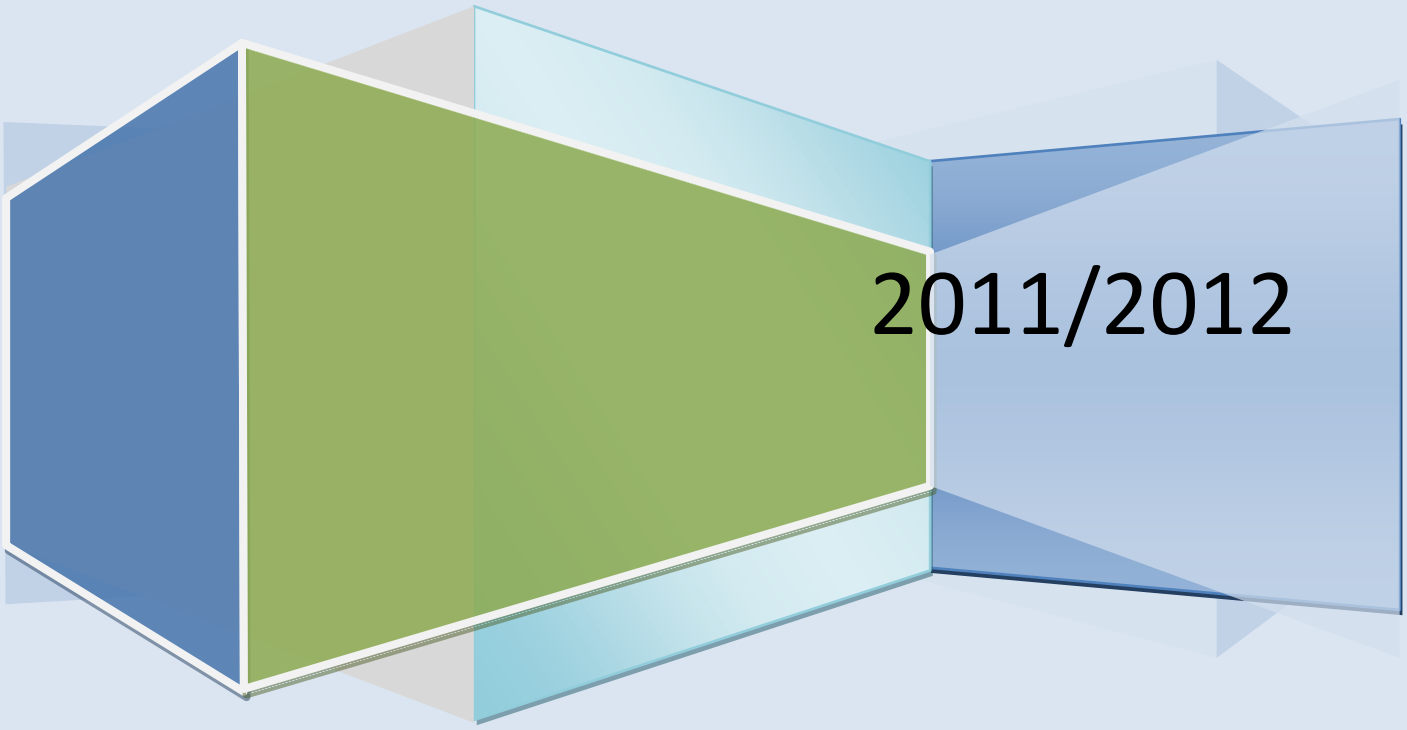
Analisi Matematica di circuiti elettrici

Eserciziario

A cura del Prof. Marco Chirizzi



2011/2012

Cap.5 Numeri complessi

5.1 Definizione di numero complesso

Si definisce numero complesso $\bar{Z}$ un numero scritto sotto la forma:

$$\bar{Z} = a + jb \qquad (forma\ algebrica)$$

dove $a\ e\ jb$ sono rispettivamente parte reale e parte immaginaria del numero complesso. Il simbolo j, che per definizione si pone uguale a $\sqrt{-1}$, prende il nome di unità immaginaria. Considerando le potenze di j, si ottengono i seguenti risultati:

$$j^1 = j = \sqrt{-1};\ \ j^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1;\ \ j^3 = j^2 \cdot j = -1 \cdot j = -j;\ \ j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = +1$$

Attraverso queste quattro potenze, si può risalire al valore di una qualunque potenza di j. Per esempio, la potenza j^7 si calcola come segue:

$$j^7 = j^4 \cdot j^3 = +1 \cdot (-1) = -1$$

Un numero complesso può essere rappresentato graficamente, come illustrato in figura 1, fissando due rette ortogonali orientate $R_e\ ed\ Im$ dette rispettivamente asse dei numeri reali e asse dei numeri immaginari. Il piano che le contiene prende il nome di piano di Gauss.

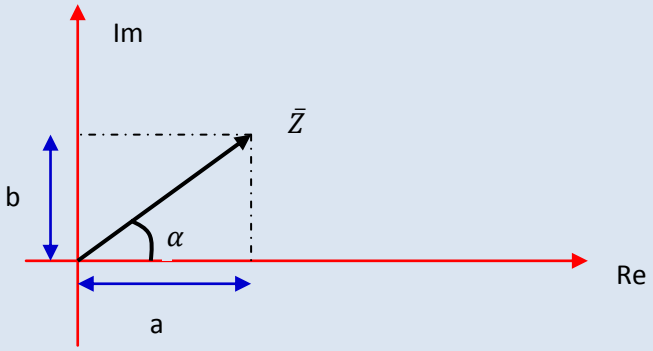


Figura 1. Rappresentazione vettoriale di un numero complesso

Il rappresentate di un numero complesso è un vettore, avente un estremo nell'origine degli assi e l'altro estremo nel punto P di coordinate $a\ e\ b$. Pertanto un numero complesso è caratterizzato da un modulo $|\overline{Z}|$ (lunghezza del vettore), che possiamo indicare anche con la lettera greca ρ, da una fase α **(angolo che il vettore forma con l'asse reale)** e da un verso **(quello indicato dalla freccia del vettore stesso).** Il modulo e la fase si calcolano come segue:

$$|\overline{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2};\qquad \alpha = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

Esempio 1.

Calcolare modulo e fase del numero $\bar{Z} = 10 - j12$:

$$|\overline{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 12^2} = \sqrt{100 + 144} = \sqrt{244}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{b}{a}\right) = arctg\left(\frac{-12}{10}\right) = -50°$$

5.2 Numeri complessi in forma polare

Un numero complesso può essere scritto anche in forma polare, ossia:

$$\bar{Z} = \rho\angle\varphi$$

dove ρ *e* φ sono rispettivamente il modulo e la fase di $\bar{Z}$.

Esempio 2.

Si esegua il passaggio dalla forma algebrica alla forma polare del numero $\bar{Z} = 2 - j8$:

Denotando con la lettera ρ il modulo e con la lettera φ la fase, si ha:

$$\rho = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{-8}{2}\right) = -76°$$

$$\bar{Z} = \rho\angle\varphi = \sqrt{68}\angle(-76°) \qquad (forma\ polare)$$

Per eseguire il passaggio inverso, si procede come segue:

Essendo $a = \rho \cdot \cos\varphi \;\; e \;\; b = \rho \cdot sen\,\varphi$ **(vedi figura 1)**, possiamo scrivere:

$\bar{Z} = a + jb = \rho \cdot \cos\varphi + j\rho \cdot sen\,\varphi = \sqrt{68} \cdot \cos(-76°) + j\sqrt{68} \cdot \text{sen}(-76°) = 2 - j8$

5.3 Numeri complessi in forma trigonometrica

Un numero complesso espresso in forma trigonometrica si scrive nel seguente modo:

$$\bar{Z} = \rho \cdot (\cos\varphi + jsen\varphi)$$

Per passare dalla forma algebrica alla forma trigonometrica, è necessari calcolare il modulo ρ e la fase φ.

Esempio 3

Si esegua il passaggio dalla forma algebrica alla forma trigonometrica del numero $\bar{Z} = -2 - j5$:

Essendo $\rho = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}, \quad \varphi = arctg\left(\frac{-5}{-2}\right) = 68°$

possiamo scrivere:

$$\bar{Z} = \rho \cdot (\cos\varphi + jsen\varphi) = \sqrt{29} \cdot (\cos 68° + jsen\ 68°)$$

5.4 Numeri complessi in forma esponenziale

Denotiamo con la lettera $\boldsymbol{e}$ il numero di Nepero, che è circa uguale a 2,72. Si dimostra la seguente formula di Eulero:

$$\boldsymbol{e}^{j\varphi} = \cos\varphi + jsen\,\varphi$$

la quale permette di scrivere un numero complesso in forma esponenziale, ossia:

$$\bar{Z} = \rho \cdot (\cos\varphi + jsen\,\varphi) = \rho \cdot \boldsymbol{e}^{j\varphi}$$

Esempio 4

Si esegua il passaggio dalla forma algebrica alla forma esponenziale del numero $\bar{Z} = 12 - j6$:

$$\rho = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{144 + 36} = \sqrt{180}$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{-6}{12}\right) = -26{,}6°$$

$$\bar{Z} = \rho \cdot \boldsymbol{e}^{j\varphi} = \sqrt{180} \cdot \boldsymbol{e}^{-j\cdot 26{,}6°}$$

Per eseguire il passaggio inverso, si procede come segue:

Essendo $\rho = \sqrt{180}\ \ e\ \ \varphi = -26{,}6°$ possiamo scrivere:

$$\bar{Z} = \rho \cdot (\cos\varphi + jsen\,\varphi) = \sqrt{180} \cdot [\cos(-26{,}6°) + jsen(-26{,}6°)] =$$

$$\underbrace{\sqrt{180}\,cos(-26{,}6°)}_{\boldsymbol{parte\ reale}} + \underbrace{j\sqrt{180}\,sen(-26{,}6°)}_{\boldsymbol{parte\ immaginaria}} = 12 - j6$$

5.4 Addizione e sottrazione di numeri complessi

Dati due numeri complessi $\bar{Z}_1 = a + jb,\ \ \bar{Z}_2 = c + jd$, la somma $\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$ si esegue nel seguente modo:

$$\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

Quindi, la somma di due numeri complessi è un numero complesso che ha per parte reale la somma delle parti reali e per parte immaginaria la somma delle parti immaginarie.

La differenza $\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2$ si calcola come segue:

$$\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2 = (a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d)$$

In generale, la differenza di due numeri complessi è un numero complesso che ha per parte reale la differenza delle parti reali e per parte immaginaria la differenza delle parti immaginarie. La somma e la differenza di numeri complessi possono essere rappresentate graficamente ricorrendo alla regola del parallelogramma (vedi figura 2).

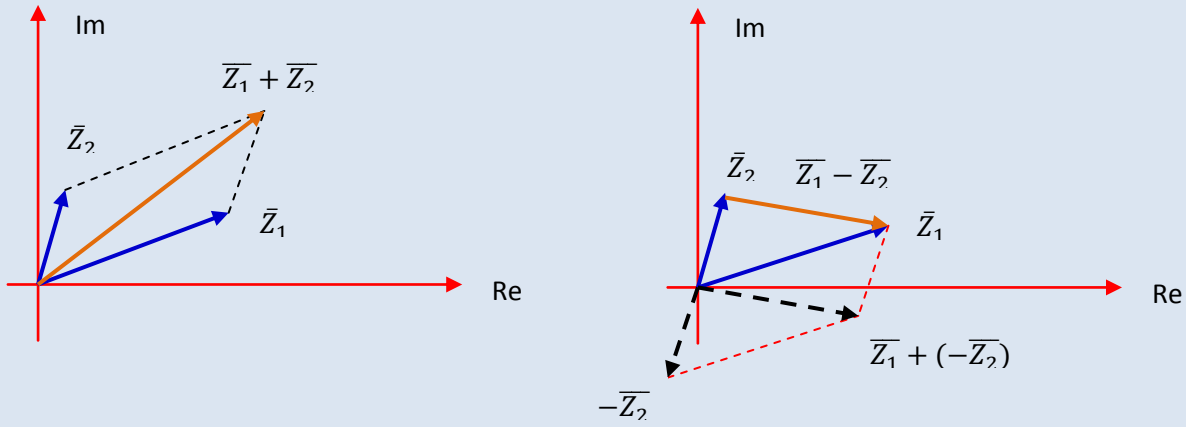


Figura 2. Somma e differenza vettoriale di numeri complessi

Esempio 4.

Dati i numeri $\bar{Z}_1 = 2 + j5$ ***e*** $\bar{Z}_2 = 6 + j3$ ***, eseguire la somma*** $\overline{Z_1} + \overline{Z_2}$ ***e la differenza*** $\overline{Z_1} - \overline{Z_2}$

$$\overline{Z_1} + \overline{Z_2} = (2 + j5) + (6 + j3) = (2 + 6) + j(5 + 3) = 8 + j8$$

$$\overline{Z_1} - \overline{Z_2} = (2 + j5) - (6 + j3) = (2 - 6) + j(5 - 3) = -4 + j2$$

5.5 Moltiplicazione di numeri complessi

Il prodotto di due numeri complessi $\bar{Z}_1 = a + jb$, $\bar{Z}_2 = c + jd$ si esegue nel seguente modo:

$$\overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2} = (a + jb) \cdot (c + jd) = a \cdot c + ja \cdot d + jb \cdot c + jb \cdot jd =$$

$$= a \cdot c + ja \cdot d + jb \cdot c + (-1) \cdot b \cdot d = a \cdot c - b \cdot d + j(a \cdot d + b \cdot c)$$

Esempio 5.

Dati i numeri $\bar{Z}_1 = \sqrt{2} + j4$ ***e*** $\bar{Z}_2 = \sqrt{2} + j3$***, eseguire il prodotto*** $\overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$***:***

$$\overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2} = \left(\sqrt{2} + j4\ \right) \cdot \left(\sqrt{2} + j3\right) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + j3 \cdot \sqrt{2} + j4 \cdot \sqrt{2} + j4 \cdot j3 =$$

$$= 2 + \ j3 \cdot \sqrt{2} + j4 \cdot \sqrt{2} - 12 = -10 + j\left(3 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{2}\right) = -10 + j7 \cdot \sqrt{2}$$

5.6 Quoziente di numeri complessi

Prima di passare al calcolo del quoziente fra due numeri espressi in forma algebrica, è necessario definire il complesso coniugato di un numero $\bar{Z}$. Dato un numero $\bar{Z} = a + jb$, si definisce complesso coniugato $\bar{Z}^*$di $\bar{Z}$ quel numero che ha la stessa parte reale di $\bar{Z}$ e parte immaginaria uguale ed opposta a quella di $\bar{Z}$.

$$\bar{Z}^* = a - jb$$

Siano dati due numeri $\overline{Z_1} = a + jb \;\; e \;\; \overline{Z_2} = c + jd$. Il quoziente $\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$ si calcola come segue:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \cdot \frac{\bar{Z}_2^{\,*}}{\bar{Z}_2^{\,*}} = \frac{a+jb}{c+jd} \cdot \frac{c-jd}{c-jd} = \frac{(a+jb)\cdot(c-jd)}{c^2+d^2} = \frac{a\cdot c - ja\cdot d + jb\cdot c + b\cdot d}{\rho^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{a\cdot c + b\cdot d}{\rho^2}}_{parte\ reale} + \underbrace{j\frac{b\cdot c - a\cdot d}{\rho^2}}_{parte\ immaginaria}$$

Come si può notare, moltiplicando numeratore e denominatore per il complesso coniugato di $\bar{Z}_2$, scompare dal denominatore l'unità immaginaria j e si possono facilmente individuare la parte reale e la parte immaginaria del numero risultante.

Esempio 6

Dati due numeri $\overline{Z_1} = \sqrt{5} + j6 \;\; e \;\; \overline{Z_2} = 2 + j8$, calcolare il quoziente $\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$.

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \cdot \frac{\bar{Z}_2^{\,*}}{\bar{Z}_2^{\,*}} = \frac{\left(\sqrt{5}+j6\right)}{(2+j8)} \cdot \frac{(2-j8)}{(2-j8)} = \frac{2\cdot\sqrt{5} - j\cdot 8\cdot\sqrt{5} + j\cdot 12 + 48}{2^2+8^2} =$$

$$= \frac{2\cdot\sqrt{5}+48}{20} + j\cdot\frac{12-8\cdot\sqrt{5}}{20} = \frac{\sqrt{5}+24}{10} + j\cdot\frac{3-2\cdot\sqrt{5}}{5}$$

Esempio 7

Dato il numero complesso

$$\bar{Z} = j\cdot b\cdot\frac{1}{a+j\cdot b}$$

verificare che il modulo $\overline{|Z|}$ ***e la fase*** φ_Z ***sono date dalle seguenti espressioni:***

$$\overline{|Z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \varphi_Z = arctg\left(\frac{a}{b}\right)$$

Il modulo si calcola come segue:

$$\overline{|Z|} = \frac{|j\cdot b|}{|a+j\cdot b|} = \frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

La fase di un numero complesso $\bar{Z} = \alpha + j\beta$ è così definita:

$$\varphi_Z = arctg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

pertanto è necessario individuare la parte reale e la parte immaginaria di $\bar{Z}$, procedendo nel seguente modo:

$$\bar{Z} = j \cdot b \cdot \frac{1}{a + j \cdot b} = \frac{j \cdot b \cdot (a - j \cdot b)}{(a + j \cdot b) \cdot (a - j \cdot b)} = \frac{j \cdot a \cdot b + b^2}{a^2 + b^2} = \underbrace{\frac{b^2}{a^2 + b^2}}_{parte\ reale} + \underbrace{j \cdot \frac{a \cdot b}{a^2 + b^2}}_{parte\ immaginaria}$$

In definitiva si ha:

$$\varphi_Z = arctg\left(\frac{\frac{a \cdot b}{a^2 + b^2}}{\frac{b^2}{a^2 + b^2}}\right) = arctg\left(\frac{a \cdot b}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{b^2}\right) = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

Esercizi numerici

Addizione e sottrazione fra numeri complessi espressi in forma algebrica

1. ***Calcolare*** $\bar{\boldsymbol{Z}} = \bar{\boldsymbol{Z}}_1 + \bar{\boldsymbol{Z}}_2$ ***con*** $\bar{\boldsymbol{Z}}_1 = \boldsymbol{3 - j}$ ***e*** $\bar{\boldsymbol{Z}}_2 = \boldsymbol{4 + j5}$

   $\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = (3 - j) + (4 + j5) = (3 + 4) + j(-1 + 5) = 7 + j4$

2. ***Calcolare*** $\bar{\boldsymbol{Z}} = \bar{\boldsymbol{Z}}_1 - \bar{\boldsymbol{Z}}_2$ ***con*** $\bar{\boldsymbol{Z}}_1 = \boldsymbol{8 + j2}$ ***e*** $\bar{\boldsymbol{Z}}_2 = \boldsymbol{5 - j3}$

   $\bar{Z} = \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2 = (8 + j2) - (5 - j3) = (8 - 5) + j[2 - (-3)] = 3 + j5$

3. ***Calcolare modulo e fase di*** $\bar{\boldsymbol{Z}} = \bar{\boldsymbol{Z}}_1 + \bar{\boldsymbol{Z}}_2$ ***con*** $\bar{\boldsymbol{Z}}_1 = \boldsymbol{3 - j2}$ ***e*** $\bar{\boldsymbol{Z}}_2 = \boldsymbol{4 + j5}$

   $\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = (3 - j2) + (4 + j5) = (3 + 4) + j(-2 + 5) = 7 + j3$

   Modulo e fase di $\bar{Z}$ si calcolano rispettivamente come segue:

   $\overline{|Z|} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7.6$

   $\angle\bar{Z} = arctg\left(\frac{b}{a}\right) = arctg\left(\frac{3}{7}\right) = 23°$

4. ***Rappresentare graficamente il numero complesso*** $\bar{\boldsymbol{Z}} = \bar{\boldsymbol{Z}}_1 + \bar{\boldsymbol{Z}}_2$ ***con*** $\bar{\boldsymbol{Z}}_1 = \boldsymbol{1 + j2}$ ***e*** $\bar{\boldsymbol{Z}}_2 = \boldsymbol{3 - j2}$

Fissata una unità di misura, si riporta per ciascun numero complesso la parte reale **a** sull'asse reale e la parte immaginaria **b** sull'asse immaginario. Ciascuna coppia di numeri $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ rappresenta, nel piano di Gauss, le coordinate di un punto P. Il vettore avente origine in O e l'altro estremo in P rappresenta il numero complesso in esame. In figura 1 sono riportate le rappresentazioni grafiche dei numeri complessi $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2 \ e \ \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$.

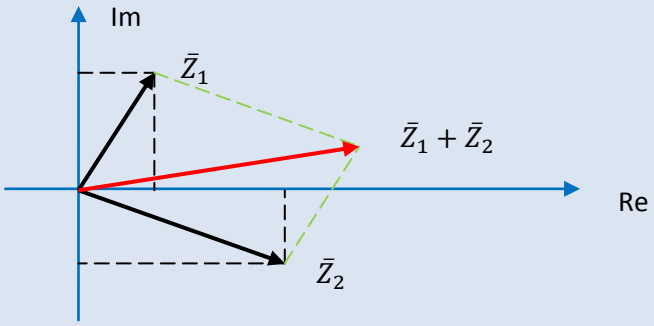


Figura 1. Rappresentazione grafica della somma di due numeri complessi

5. ***Dato il numero complesso*** $\boldsymbol{10 - j8 = \bar{Z}_0 + \bar{Z}}$ ***con*** $\boldsymbol{\bar{Z} = 3 - j5}$***, determinare*** $\boldsymbol{\bar{Z}_0}$.

   Poniamo:

$$\bar{Z}_0 = a + jb$$

$10 - j8 = \bar{Z}_0 + \bar{Z} = (a + jb) + (3 - j5) \ \rightarrow \quad 10 - j8 = (a + 3) + j(b - 5);$

$\rightarrow a + 3 = 0 \ \ da\ cui \ \ a = -3; \quad b - 5 = -8 \ \ da\ cui \ \ b = -3.$

In definitiva si ha:

$$\bar{Z}_0 = 7 - j3$$

Moltiplicazione e divisione fra numeri complessi espressi in forma algebrica

1. ***Dati due numeri complessi*** $\boldsymbol{\bar{Z}_1 = 8 + j3}$ ***e*** $\boldsymbol{\bar{Z}_2 = -4 - j5}$***, determinare*** $\boldsymbol{\bar{Z} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2}$.

   $\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 = (8 - j3) \cdot (-4 - j5) = 8 \cdot (-4) + 8 \cdot (-j5) + (-j3) \cdot (-4) + (-j3) \cdot (-j5) =$

   $= -32 - j40 + j12 + 15 = -17 - j28$

2. ***Dati due numeri complessi*** $\boldsymbol{\bar{Z}_1 = -j4}$ ***e*** $\boldsymbol{\bar{Z}_2 = 3 + j12}$***, determinare*** $\boldsymbol{\bar{Z} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2}$.

$\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 = -j4 \cdot (3 + j12) = -j12 - j^2 48 = -j12 + 48$

3. ***Si esegua il prodotto fra i numeri complessi*** $\boldsymbol{\bar{Z}_1 = 3 - j2}$ ***e*** $\boldsymbol{\bar{Z}_2 = 1 + j3}$***; si rappresenti graficamente il numero complesso*** $\boldsymbol{\bar{Z} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2}$.

$$\bar{Z} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 = (3 - j2) \cdot (1 + j3) = 3 + j9 - j2 + 6 = 9 + j7$$

Per rappresentare graficamente il numero complesso $\bar{Z} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$, è opportuno che la sua espressione algebrica venga scritta nella forma:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 = \underbrace{(3 - j2)}_{\bar{Z}_1} + \underbrace{3 \cdot (3 - j2) \cdot j}_{3 \cdot \bar{Z}_1 \cdot j} = \bar{Z}_1 + 3 \cdot j \cdot \bar{Z}_1$$

A questo punto, il numero complesso $\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$ lo si rappresenta graficamente tracciando nel piano di Gauss i vettori $\bar{Z}_1$ *e* $3 \cdot j \cdot \bar{Z}_1$ per poi sommarli mediante la regola del parallelogramma (vedi figura in basso). Il numero complesso $3 \cdot j \cdot \bar{Z}_1$ è rappresentato da un vettore di modulo $3 \cdot |\overline{Z_1}|$. La fase si determina ruotando questo vettore, in senso antiorario, di un angolo pari a 90° rispetto al vettore $\bar{Z}_1$. La rappresentazione grafica è riportata in figura 2.

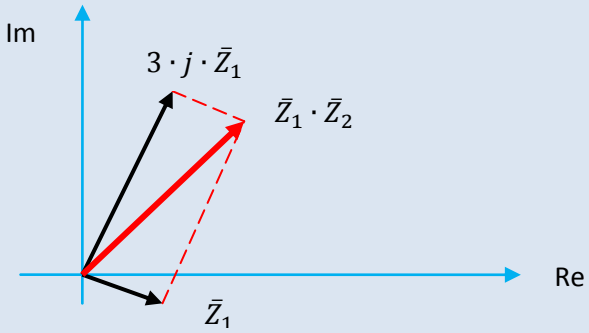


Figura 2. Rappresentazione grafica del prodotto di due numeri complessi

4. ***Dato il numero complesso $\bar{Z} = 6 - j10$ e il numero reale $R = 2$, calcolare il rapporto $\frac{\bar{Z}}{R}$.***

$$\frac{\bar{Z}}{R} = \frac{6 - j10}{2} = \frac{6}{2} - j\frac{10}{2} = 3 - j5$$

5. ***Dati i numeri complessi $\bar{Z}_1 = 10 + j12$ e $\bar{Z}_2 = -j12$, calcolare il rapporto $\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$.***

$$\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = \frac{10 + j12}{-j12} = \frac{10}{-j12} + \frac{j12}{-j12} = +j\frac{10}{12} - 1 = -1 + j\frac{5}{6}$$

6. ***Dati i numeri complessi $\bar{Z}_1 = 3 - j8$ e $\bar{Z}_2 = 4 - j2$, calcolare il rapporto $\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$.***

$$\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = \frac{3 - j8}{4 - j2}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per il complesso coniugato $\bar{Z}_2{}^*$ di $\bar{Z}_2$, si ha:

$$\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2{}^*}{\bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_2{}^*} = \frac{(3 - j8) \cdot (4 + j2)}{(4 - j2) \cdot (4 + j2)} = \frac{12 + j6 - j32 + 16}{16 + j8 - j8 + 4} = \frac{28 - j26}{20} = \frac{28}{20} - j\frac{26}{20} =$$
$$= \frac{7}{5} - j\frac{13}{10}$$

Siccome il prodotto fra un numero complesso $\bar{Z}$ ed il suo coniugato $\bar{Z}^*$ è uguale al quadrato del modulo di $\bar{Z}$, il rapporto $\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$ si può calcolare anche nel seguente modo:

$$\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2^{\,*}}{\bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_2^{\,*}} = \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2^{\,*}}{|\bar{Z}_2|^2} = \frac{(3 - j8) \cdot (4 + j2)}{|4 - j2|^2} = \frac{28 - j26}{\left(\sqrt{4^2 + 2^2}\right)^2} = \frac{28 - j26}{\left(\sqrt{20}\right)^2} = \frac{28 - j26}{20} =$$

$$\frac{20}{8} - j\frac{26}{20} = \frac{7}{5} - j\frac{13}{10}$$

7. ***Si rappresenti graficamente il numero complesso*** $\bar{Z} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = \frac{4+j2}{2-j4}$.

Si scrive $\bar{Z}$ nella seguente forma:

$$\bar{Z} = \frac{(4 + j2) \cdot (2 + j4)}{|2 - j4|^2} = \frac{(4 + j2) \cdot (2 + j4)}{20} = \frac{2 \cdot (4 + j2) \cdot 4 \cdot (4 + j2) \cdot j}{20} = \frac{2 \cdot \bar{Z}_1 + 4 \cdot j \cdot \bar{Z}_1}{20}$$

A questo punto si tracciano nel piano di Gauss i vettori $2 \cdot \bar{Z}_1$ *e* $4 \cdot j \cdot \bar{Z}_1$, si esegue la somma vettoriale $2 \cdot \bar{Z}_1 + 4 \cdot j \cdot \bar{Z}_1$, mediante la regola del parallelogramma, e si divide per 20 la diagonale del parallelogramma (vedi figura 3).

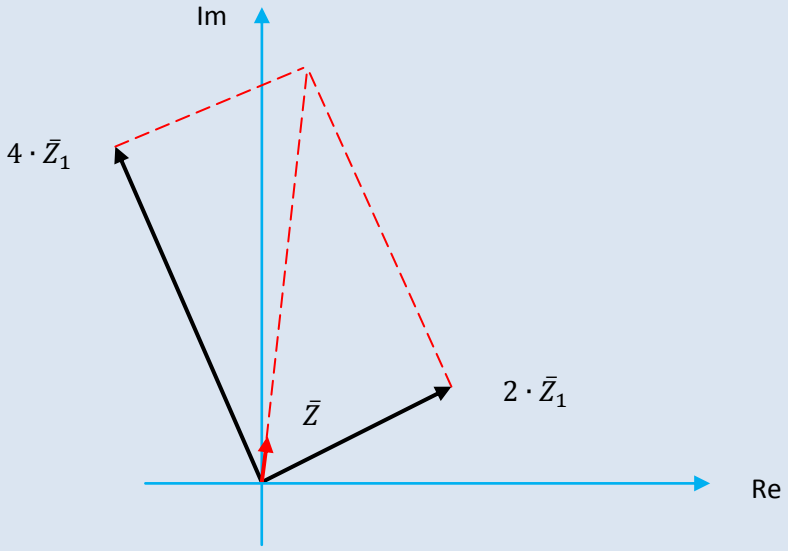


Figura 3. Rappresentazione grafica del rapporto fra due numeri complessi

8. ***Semplificare l'espressione***

$$\left(\frac{\mathbf{1 - j4}}{\mathbf{2 + j6}} + \frac{\mathbf{4 - j2}}{\mathbf{6}}\right) \cdot (\mathbf{-1 + j8})$$

$$\left(\frac{1 - j4}{2 + j6} + \frac{4 - j2}{6}\right) \cdot (-1 + j8) = \left(\frac{(1 - j4) \cdot (2 - j6)}{|2 + j6|^2} + \frac{4 - j2}{6}\right) \cdot (-1 + j8) =$$
$$= \left(\frac{2 - j6 - j8 - 24}{40} + \frac{4 - j2}{6}\right) \cdot (-1 + j8) = \left(\frac{-20 - j14}{40} + \frac{4 - j2}{6}\right) \cdot (-1 + j8) =$$
$$= \left(\frac{-60 - j42 + 80 - j40}{120}\right) \cdot (-1 + j8) = \left(\frac{20 - j82}{120}\right) \cdot (-1 + j8) =$$
$$= \frac{-20 + j160 + j82 + 656}{120} = \frac{636 + j242}{120} = \frac{53}{10} + j\frac{121}{60}$$

Moltiplicazione e divisione fra numeri complessi espressi in forma polare

1. ***Scrivere in forma polare il numero $\bar{Z} = 10 + j20$***

   Un numero complesso in forma polare si scrive come segue:

   $$\bar{Z} = \rho \angle \varphi_A$$

   Calcoliamo modulo e fase di $\bar{Z}$:

   $\rho = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22{,}4 \qquad \angle\varphi_A = arctg\left(\frac{20}{10}\right) = 63°$

   In definitiva si ha:

   $\bar{Z} = \rho \angle \varphi_A = 22{,}4 \angle 63°$

2. ***Eseguire il rapporto fra i seguenti numeri complessi:***

   $$\bar{Z}_1 = 10 \angle 35° \quad \bar{Z}_2 = 40 \angle 10°$$

   $$\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = \frac{\rho_1 \angle \varphi_{Z1}}{\rho_2 \angle \varphi_{Z2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \angle(\varphi_{Z1} - \varphi_{Z2}) = \frac{10}{40} \angle(35° - 10°) = \frac{1}{4} \angle 25°$$

3. ***Eseguire il prodotto fra i seguenti numeri complessi:***

   $$\bar{Z}_1 = 4 \angle 20° \quad \bar{Z}_2 = 7 \angle -60°$$

   $$\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 = \rho_1 \angle \varphi_{Z1} \cdot \rho_2 \angle \varphi_{Z2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \angle(\varphi_{Z1} + \varphi_{Z2}) = 28 \angle \left(20° + (-60°)\right) = 28 \angle -40°$$

4. ***Scrivere in forma algebrica il numero complesso $\bar{Z} = 10 \angle 45°$.***

   $a = \rho \cdot cos\varphi_z = 10 \cdot cos\, 45° = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \cdot \sqrt{2}$

   $b = \rho \cdot sen\varphi_z = 10 \cdot sen\, 45° = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \cdot \sqrt{2}$

   $$\bar{Z} = a + jb = 5 \cdot \sqrt{2} + j \cdot 5 \cdot \sqrt{2}$$

5. ***Eseguire il prodotto fra i seguenti numeri complessi:***

   $$\bar{Z}_1 = \frac{1}{3} - j \cdot \frac{2}{3} \qquad \bar{Z}_2 = 4 \angle 30°$$

   Per eseguire il prodotto $\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$ è necessario che i due numeri complessi vengano scritti nella stessa forma. Conviene esprimere $\bar{Z}_1$ in forma polare:

   $$\rho_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

   $$\varphi_{Z1} = arctg\left(\frac{b}{a}\right) = arctg\left(\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}\right) = arctg\left(-\frac{2}{3} \cdot 3\right) = arctg\,(-2) = -63{,}4°$$

$$\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 = \rho_1 \angle\varphi_{Z1} \cdot \rho_2 \angle\varphi_{Z2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \angle(\varphi_{Z1} + \varphi_{Z1}) = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot 4 \angle -33{,}4°$$

6. ***Eseguire la somma fra i seguenti numeri complessi:***

$$\bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{6} \angle \boldsymbol{30°} \quad \bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{2} \angle \boldsymbol{45°}$$

Per eseguire la somma $\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$ trasformiamo entrambi i numeri complessi in forma algebrica:

$\bar{Z}_1 = a + jb = \rho \cdot cos\,\varphi_{Z1} + j \cdot \rho \cdot sen\,\varphi_{Z1} = 6 \cdot cos\,30° + j \cdot 6 \cdot sen\,30° = 3 \cdot \sqrt{3} + j \cdot 3$

$\bar{Z}_2 = c + jd = \rho' \cdot cos\,\varphi_{Z2} + j \cdot \rho' \cdot sen\,\varphi_{Z2} = 2 \cdot cos\,45° + j \cdot 2 \cdot sen\,45° = \sqrt{2} + j \cdot \sqrt{2}$

Pertanto si ha:

$$\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = a + jb + c + jd = 3 \cdot \sqrt{3} + j \cdot 3 + \sqrt{2} + j \cdot \sqrt{2} = \left(3 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2}\right) + j \cdot \left(3 + \sqrt{2}\right)$$

Moltiplicazione e divisione fra numeri complessi espressi in forma esponenziale

1. ***Eseguire il prodotto fra i numeri complessi:***

$$\bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{6} \cdot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{3}}} \quad \bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{10} \cdot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{6}}}$$

$\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 = \rho_1 \cdot e^{j\,\varphi_1} \cdot \rho_2 \cdot e^{j\,\varphi_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{j\,(\varphi_1 + \varphi_2)} = 6 \cdot 10 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = 60 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$

2. ***Eseguire il rapporto fra i numeri complessi:***

$$\bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{4}}} \quad \bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{20} \cdot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}}$$

$$\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = \frac{\rho_1 \cdot e^{j\,\varphi_1}}{\rho_2 \cdot e^{j\,\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{j\,(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{2}{20} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{10} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

3. ***Scrivere in forma esponenziale il seguente numero complesso:***

$$\bar{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{3} \cdot (\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{45°} + \boldsymbol{j}\,\boldsymbol{sen}\,\boldsymbol{45°})$$

$\bar{Z} = \rho \cdot (cos\,\varphi + j\,sen\varphi) = \rho \cdot e^{j\,\varphi} = 3 \cdot e^{j\,45°}$

4. ***Semplificare l'espressione:***

$$\frac{\dfrac{\bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{1}}}{\bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{2}}} \cdot \dfrac{\bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{3}}}{\bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{4}}}}{\bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{5}}}$$

sapendo che:

$$\bar{Z}_1 = 10 - j6 \quad \bar{Z}_2 = 3 + j8 \quad \bar{Z}_3 = 6 - j3 \quad \bar{Z}_1 = 4 - j2 \quad \bar{Z}_4 = 2 - j2$$

Scriviamo i numeri complessi in forma esponenziale:

$$\rho_1 = |10 - j6| = \sqrt{10^2 + 6^2} = 11{,}6 \qquad \varphi_{z1} = arctg\left(\frac{-6}{10}\right) = -31°$$
$$\bar{Z}_1 = \rho_1 \cdot e^{j\,\varphi_{z1}} = 11{,}6 \cdot e^{-j\,31°}$$
$$\rho_2 = |3 + j8| = \sqrt{3^2 + 8^2} = 12 \qquad \varphi_{z2} = arctg\left(\frac{8}{3}\right) = 69°$$
$$\bar{Z}_2 = \rho_2 \cdot e^{j\,\varphi_{z2}} = 12 \cdot e^{j\,69°}$$
$$\rho_3 = |6 - j3| = \sqrt{6^2 + 3^2} = 6{,}7 \qquad \varphi_{z3} = arctg\left(\frac{-3}{6}\right) = -26{,}5°$$
$$\bar{Z}_3 = \rho_3 \cdot e^{j\,\varphi_{z3}} = 6{,}7 \cdot e^{-j\,26{,}5°}$$
$$\rho_4 = |4 - j2| = \sqrt{4^2 + 2} = 4{,}5 \qquad \varphi_{z4} = arctg\left(\frac{-2}{4}\right) = -26{,}5°$$
$$\bar{Z}_4 = \rho_4 \cdot e^{j\,\varphi_{z4}} = 11{,}6 \cdot e^{-j\,26{,}5°}$$
$$\rho_5 = |2 - j2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2{,}8 \qquad \varphi_{z5} = arctg\left(\frac{-2}{2}\right) = -45°$$
$$\bar{Z}_5 = \rho_5 \cdot e^{j\,\varphi_{z5}} = 2{,}8 \cdot e^{-j\,45°}$$

$$\frac{\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_4}}{\bar{Z}_5} = \frac{\frac{10 - j6}{3 + j8} \cdot \frac{6 - j3}{4 - j2}}{2 - j2} = \frac{\frac{11{,}6 \cdot e^{-j\,31°}}{12 \cdot e^{j\,65°}} \cdot \frac{6{,}7 \cdot e^{-j\,26{,}5°}}{4{,}5 \cdot 6^{j\,45°}}}{2{,}8 \cdot e^{-j\,45°}} = \frac{0{,}96 \cdot e^{-j\,96°} \cdot 1{,}49}{2{,}8 \cdot e^{-j\,45°}} =$$
$$= 0{,}51 \cdot e^{-j\,141°}$$

Esercizi proposti

1. **Dati i numeri**

$$\bar{Z}_1 = \frac{1}{2} - j\frac{6}{5}, \quad \bar{Z}_2 = \frac{1}{4} - j\frac{1}{5}$$

calcolare: $\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$ ***e*** $\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2$

2. **Dati i numeri**

$$\bar{Z}_1 = 3 - j4, \quad \bar{Z}_2 = 8 - j2$$

calcolare: $\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$ ***e*** $\bar{Z}_1/\bar{Z}_2$

3. **Rappresentare nel piano complesso i numeri**

$$\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2, \qquad \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2, \qquad \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2, \qquad \bar{Z}_1/\bar{Z}_2$$

4. **Esprimere il numero** $\bar{Z}_1 = 1 - j2$ **in forma polare.**

5. **Esprimere il numero** $\bar{Z}_1 = 4\,\angle 45°$ **in forma algebrica.**

6. **Dato il numero $\overline{Z}_1 = \sqrt{2} + j4$, calcolare:**

$$\overline{Z}^* \cdot \overline{Z}, \quad \overline{Z}^* + \overline{Z}, \quad \overline{Z}^* / \overline{Z}.$$

7. **Eseguire i seguenti prodotti:**

$a)\ (5 - j5) \cdot (2 + j4)$; $b)\ (3 - j8) \cdot (4 + j2) \cdot (2 + j12)$;
$c)\ 2\angle 60° \cdot 10\angle 20°$; $d)\ (3 - j8) \cdot 6\angle 120°$

8. **Semplificare le seguenti espressioni:**

$a)\ \dfrac{2 - j4}{15\angle 240°} + 3\angle 45°$; $b)\ \dfrac{(1 - j2)^2}{1 + j6} \cdot (3 - j2)$
$c)\ \dfrac{1}{3 - j2} + \dfrac{1}{4 - j4} - \dfrac{1}{1 + j5}$

9. **Esprimere ciascun numero complesso in forma polare:**

$a)\ 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$; $b)\ 8 \cdot e^{-j\frac{\pi}{6}}$; $c)\ -12 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}}$

10. **Calcolare, in ciascun caso:**

$$\frac{1}{\frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} + \frac{1}{\overline{Z}_3}}$$

$a)\ \overline{Z}_1 = 1 - j1, \quad \overline{Z}_2 = 2 + j4, \quad \overline{Z}_3 = 5 - j1$
$b)\ \overline{Z}_1 = 30\angle 45°, \quad \overline{Z}_2 = 2\angle 10°, \quad \overline{Z}_3 = 80\angle 60°$