Esercizio n°4

Dato il circuito di figura 1, determinare l'espressione matematica della tensione $v_C(t)$, supponendo che l'interruttore T_2 venga chiuso e l'interruttore T_1 venga aperto, una volta che la maglia, composta dagli elementi $E, R\ ed\ L$, abbia raggiunto lo stato di regime.

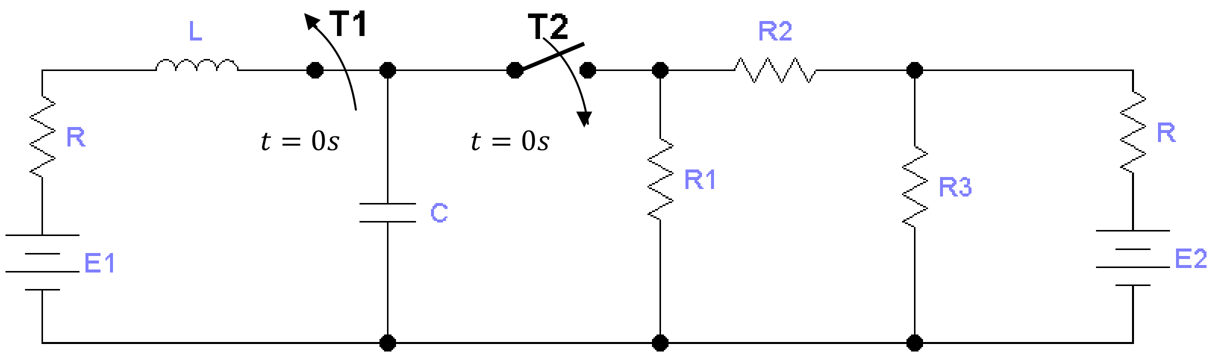

Figura 1. Circuito RLC

Soluzione

Analizziamo il circuito per $t = 0^-$. Per ipotesi, l'interruttore T_1 è chiuso e l'interruttore T_2 è aperto. Una volta che il circuito raggiunge il regime, risultano:

$$i_C(0^-) = 0A, \quad v_L(0^-) = 0V,$$

Siccome l'induttore, il resistore e il capacitore sono collegati in serie, vale la seguente uguaglianza:

$$i_R(0^-) = i_C(0^-) = i_L(0^-) = 0A$$

Inoltre si ha:

$$v_C(0^-) = E_1 - R \cdot i_L(0^-) - v_L(0^-) = E_1$$

Per il principio di continuità della tensione ai capi del capacitore e della corrente che attraversa l'induttore, possiamo scrivere:

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = E_1$$

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0A$$

Analizziamo il circuito per $t = 0^+$. Per ipotesi, l'interruttore T_1 è aperto e l'interruttore T_2 è chiuso. Prima di scrivere le equazioni di Kirchhoff, è bene semplificare il circuito applicando il teorema di Thevenin sulla porzione di rete a valle dell'interruttore T_2. Facendo riferimento al circuito di figura 2 e staccando il ramo composto da $R_1\ ed\ \ R_2$, si procede come segue:

a) Si cortocircuita il generatore di tensione E_2 e si esegue il calcolo della resistenza equivalente di Thevenin R_{TH};
b) Si inserisce il generatore di tensione E_2 e si esegue il calcolo della tensione equivalente di Thevenin E_{TH}.

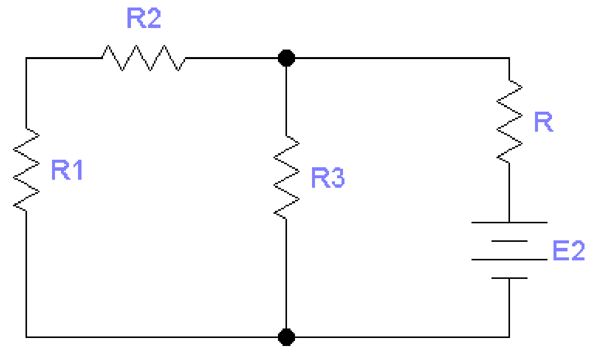

Figura 2. Porzione di circuito da semplificate mediante il teorema di Thevenin.

In formule si ha:

$$R_{TH} = \frac{R \cdot R_3}{R + R_3} \qquad E_{TH} = R_3 \cdot \frac{E_2}{R + R_3}$$

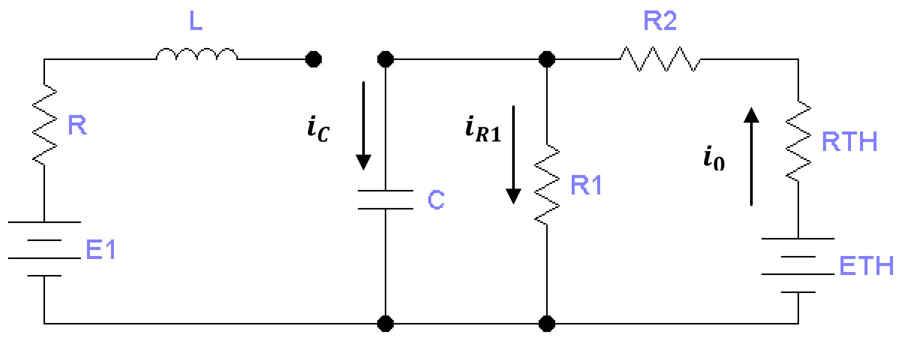

Figura 3. Circuito per la determinazione della tensione $v_C(t)$

Applicando le equazioni di Kirchhoff si ha:

$$i_0(t) = i_{R1}(t) + i_C(t) = \frac{v_C(t)}{R_1} + C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} \qquad (1)$$

$$v_C(t) = v_{R1}(t) \qquad (2)$$

$$E_{TH} - R_{TH} \cdot i_0(t) - R_2 \cdot i_0(t) - v_C(t) = 0 \qquad (3)$$

Sostituendo la (1) nella (3) e sviluppando i calcoli si ottiene la seguente equazione differenziale del primo ordine, a coefficienti costanti, non omogenea:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \left(\frac{\frac{R_{TH} + R_2}{R_1} + 1}{(R_2 + R_{TH}) \cdot C} \right) \cdot v_C(t) = \frac{E_{TH}}{\frac{R_2 + R_{TH}}{R_1} + 1} \qquad (4)$$

Siccome l'equazione differenziale in questione non è omogenea, la soluzione risulta:

$$v_C(t) = v_C(t)^{OMOGENEA} + v_C(t)^{PARTICOLARE}$$

dove:

$$v_C(t)^{OMOGENEA} = K \cdot e^{S \cdot t} = \left(E - \frac{E_{TH}}{\frac{R_2 + R_{TH}}{R_1} + 1} \right) \cdot e^{-\frac{\frac{R_{TH}+R_2}{R_1}+1}{(R_2+R_{TH}) \cdot C} \cdot t}$$

$$v_C(t)^{PARTICOLARE} = \frac{E_{TH}}{\frac{R_2 + R_{TH}}{R_1} + 1}$$