

Esercizio n°3

Il circuito di figura 1 sta funzionando a regime quando, a $t = 0$ l'interruttore si chiude. Determinare $v_C(t)$ per $t \geq 0$.

DATI: $E = 100V$, $L = 0.2H$, $C = 0.05F$, $R = 1\Omega$

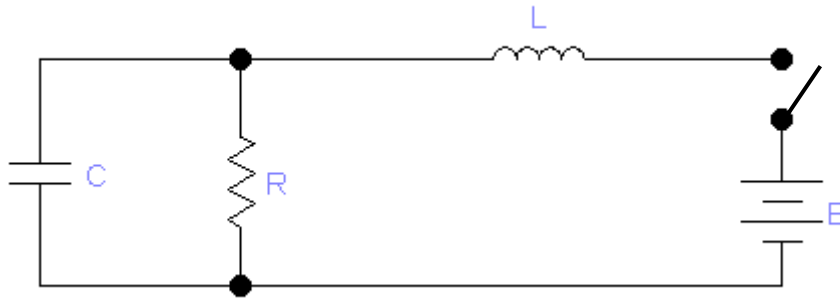


Figura 1. Circuito RLC

Soluzione

Per $t = 0^-$ (interruttore aperto) si ha:

$$v_C(t = 0^-) = 0V, \quad v_R(t = 0^-) = 0V, \quad i_L(t = 0^-) = i_C(t = 0^-) = i_R(t = 0^-) = 0A$$

Ora analizziamo il circuito supponendo che l'interruttore sia chiuso.

Per il principio di continuità della tensione ai capi del condensatore e della corrente che attraversa l'induttore, possiamo scrivere:

$$v_C(t = 0^-) = v_C(t = 0^+) = 0V$$

$$i_L(t = 0^-) = i_L(t = 0^+) = 0A$$

Applicando il primo e il secondo principio di Kirchhoff si ha:

$$i_L(t) = i_C(t) + i_R(t) \quad (1)$$

$$v_R(t) = v_C(t) \quad (2)$$

$$E - v_L(t) - v_C(t) = 0 \quad (3)$$

Sostituendo la (1) nell'espressione

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

si ottiene:

$$v_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt}(i_C(t) + i_R(t)) \quad (4)$$

Sostituendo l'espressione

$$i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

nella (4) si ottiene:

$$v_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} \left(C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_R(t)}{R} \right)$$

Siccome in questo caso vale l'uguaglianza $v_R(t) = v_C(t)$ possiamo scrivere:

$$v_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} \left(C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R} \right)$$

e sviluppando i calcoli si ottiene:

$$v_L(t) = L \cdot C \cdot \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (5)$$

Dall'equazione (3) si ricava:

$$v_L(t) = E - v_C(t)$$

Sostituendo nella (5) quest'ultima espressione, si ha:

$$\begin{aligned} E - v_C(t) &= L \cdot C \cdot \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{L \cdot C} &= \frac{E}{L \cdot C} \end{aligned}$$

Poniamo

$$2 \cdot \alpha = \frac{1}{R \cdot C} \quad \rightarrow \quad \alpha = 10 s^{-1}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \quad \rightarrow \quad \omega_0 = 10 \text{ rad/sec}$$

pertanto l'equazione differenziale si scrive come segue:

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot v_C(t) = \omega_0^2 \cdot E \quad (6)$$

la cui soluzione è data dalla somma di due soluzioni:

$$v_C(t) = v_C(t)^{OMOGENEA} + v_C(t)^{PARTICOLARE}$$

L'integrale particolare $v_C(t)^{PARTICOLARE}$ si determina ponendo nella (6):

$$v_C(t) = COSTANTE = A$$

da cui si ottiene:

$$A = E = 100V$$

Siccome $\alpha = \omega_0$, la soluzione $v_C(t)$ *OMOGENEA* dell'equazione omogenea associata alla (6) ha la seguente forma funzionale:

$$v_C(t) \text{ OMOGENEA} = K_1 \cdot e^{S \cdot t} + K_2 \cdot t \cdot e^{S \cdot t} \quad (7)$$

dove S è la soluzione dell'equazione

$$S^2 + 2 \cdot \alpha \cdot S + \omega_0^2 = 0 \quad (8)$$

che si ottiene dall'equazione differenziale omogenea

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot v_C(t) = 0$$

dopo avere posto:

$$S^2 = \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2}, \quad S = \frac{dv_C(t)}{dt}, \quad v_C(t) = 1$$

Risolvendo la (8) si ricavano le seguenti soluzioni:

$$S_1 = S_2 = S = -10$$

pertanto la (7) diviene:

$$v_C(t) \text{ OMOGENEA} = K_1 \cdot e^{-10 \cdot t} + K_2 \cdot t \cdot e^{-10 \cdot t}$$

Le costanti K_1 e K_2 si calcolano considerando le seguenti condizioni iniziali:

$$v_C(0^+) = 0 = v_C(0^+) \text{ OMOGENEA} + v_C(0^+) \text{ PARTICOLARE} + A = K_1 + 100 \rightarrow K_1 = -100$$

$$\frac{dv_C(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = 0 = \frac{d}{dt} [v_C(0^+) \text{ OMOGENEA} + v_C(0^+) \text{ PARTICOLARE}] = -10 \cdot K_1 + K_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow K_2 = -1000$$

In definitiva, la soluzione complessiva risulta:

$$v_C(t) = v_C(t) \text{ OMOGENEA} + v_C(t) \text{ PARTICOLARE} = -100 \cdot e^{-10 \cdot t} - 1000 \cdot t \cdot e^{-10 \cdot t} + 100$$