Esercizio n°2

Nel circuito in figura 1 l'interruttore è del tipo senza interruzione, in modo tale che la corrente che attraversa l'induttore non subisca discontinuità. Si supponga che l'interruttore sia rimasto nella posizione A per un tempo infinitamente lungo. Nell'istante $t = 0$, l'interruttore si sposta dalla posizione A alla posizione B. determinare:

a) $i_L(t = 0^+)\ e\ v_L(t = 0^+)$
b) $i_L(t)\ per\ t > 0$
c) $v_L(t \to \infty)$

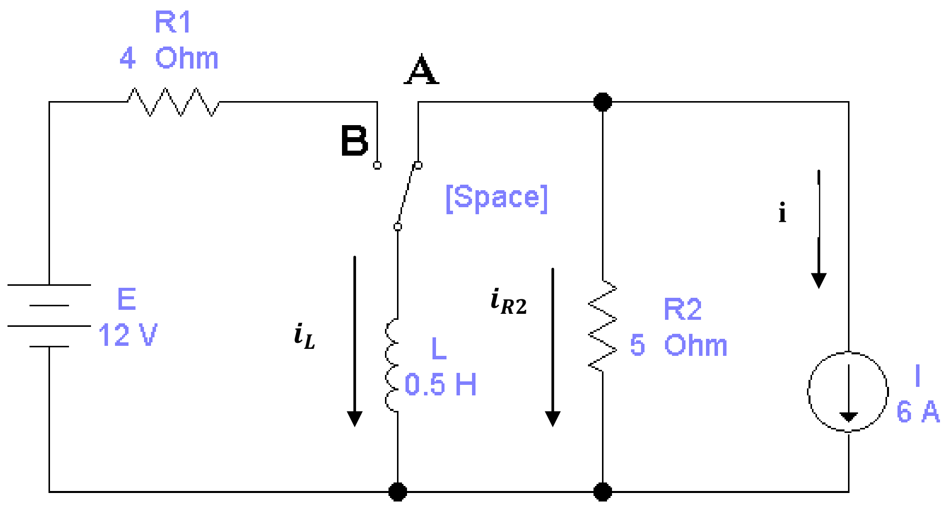

Figura 1. Rete elettrica RL

Soluzione

Considerando il circuito con l'interruttore nella posizione A, e valutandolo a regime, si può scrivere:

$$v_L(t = 0^-) = 0V$$

per cui l'induttore si comporta come un corto circuito. Anche la tensione ai capi del resistore R_2 risulta nulla. Applicando il primo principio di Kirchhoff si ha:

$$i_L(0^-) + i_{R2}(0^-) + i(0^-) = 0 \quad con \quad i_{R2}(0^-) = 0A \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow\ i_L(0^-) + i(0^-) = 0 \quad \rightarrow \qquad i_L(0^-) = -i(0^-) = -6A$$

Esaminiamo ora il circuito con l'interruttore nella posizione B, per $t \in [0^+, +\infty]$.

Per il principio di continuità della corrente che attraversa l'induttore, si può scrivere:

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = -6A$$

Applicando il primo principio di Kirchhoff si ha.

$$E - v_{R1}(t) - v_L(t) = 0 \quad \rightarrow \quad v_L(t) = E - v_{R1}(t) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \; \boldsymbol{v_{R1}(t) = E - \; v_L(t)} \qquad (1)$$

Sapendo che:

$$\boldsymbol{v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = L \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{v_{R1}(t)}{R_1}\right) = \frac{L}{R_1}\frac{dv_{R1}(t)}{dt}} \qquad (2)$$

e sostituendo la (1) nella (2) si ottiene l'equazione:

$$v_L(t) = \frac{L}{R_1}\frac{d}{dt}[E - \; v_L(t)] \quad \rightarrow \quad v_L(t) = -\frac{L}{R_1}\frac{dv_L(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dv_L(t)}{v_L(t)} = -\frac{R_1}{L} \cdot dt$$

la cui soluzione si determina come segue:

$$\int_{v_{L0}}^{v_L} \frac{dv_L(t)}{v_L(t)} = \int_0^t -\frac{R_1}{L} \cdot dt' \quad \rightarrow \quad \ln v_L(t) - \ln v_L(0) = -\frac{R_1}{L} \cdot t \quad \rightarrow \quad \ln\frac{v_L(t)}{v_L(0)} = -\frac{R_1}{L} \cdot t \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{v_L(t)}{v_L(0)} = e^{-\frac{R_1}{L}\cdot t} \quad \rightarrow \quad v_L(t) = v_L(0) \cdot e^{-\frac{R_1}{L}\cdot t}$$

dove

$$v_L(0^+) = E - \; v_{R1}(0^+) = E - R_1 \cdot i_{R1}(0^+) = E - R_1 \cdot i_L(0^+) = 12 + 4 \cdot 6 = 36V$$

per cui si ha:

$$\boldsymbol{v_L(t) = 36 \cdot e^{-\frac{R_1}{L}\cdot t} = 36 \cdot e^{-8\cdot t}}$$

Partendo dall'equazione differenziale

$$\boldsymbol{v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}}$$

si ricava l'espressione matematica della corrente $i_L(t)$:

$$\int_{i_{L0}}^{i_L} di_L(t) = \int_0^t \frac{v_L(t)}{L} \cdot dt \quad \rightarrow \quad i_L(t) - i_L(0) = \int_0^t \frac{36}{L} \cdot e^{-\frac{R_1}{L}\cdot t} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad i_L(t) = i_L(0^+) - \frac{36}{R_1} \cdot \left(e^{-\frac{R_1}{L}\cdot t} - 1\right) = -6 - \frac{36}{R_1} \cdot \left(e^{-\frac{R_1}{L}\cdot t} - 1\right) = 3 - 6^{-8\cdot t}$$

$$\boldsymbol{i_L(t) = 3 - 6^{-8\cdot t}}$$