Esercizio n°1

Dato il circuito in figura 1, si chiede di determinare la tensione $v_C(t)$ per $t \geq 0$ supponendo che l'interruttore venga chiuso all'istante $t = 0$. Si supponga inoltre che il circuito risulti già in funzione, da lungo tempo, prima della chiusura dell'interruttore.

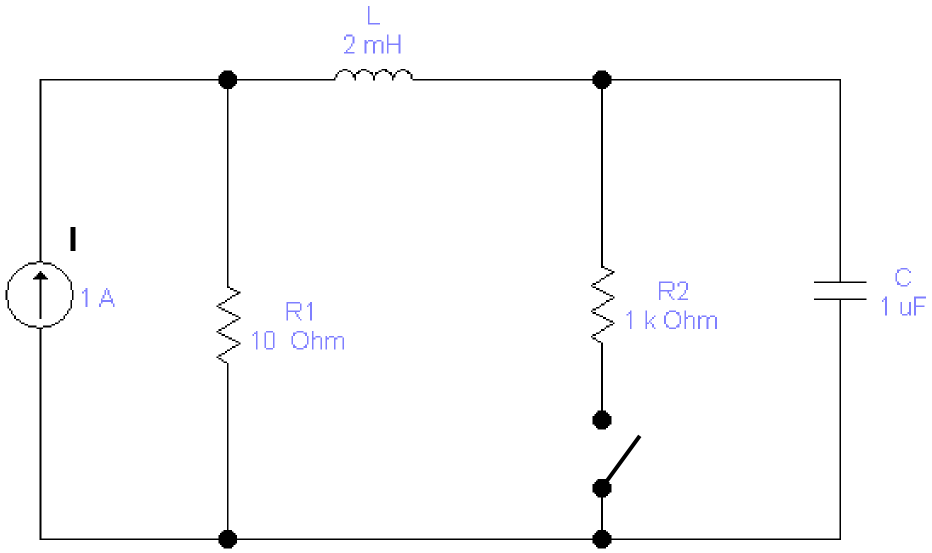

Figura 1. Rete elettrica RLC

Soluzione

All'istante $t = 0^-$ le condizioni di funzionamento del circuito sono le seguenti:

$$v_C(0^-) = costante \quad \rightarrow \quad i_c(0^-) = 0A \quad essendo \;\; i_c(0^-) = C\,\frac{dv_c(0^-)}{dt} = 0A$$

$$i_L(0^-) = costante \quad \rightarrow \quad v_L(0^-) = 0V \quad essendo \;\; v_L(0^-) = L\,\frac{d\,i_L(0^-)}{dt} = 0V$$

Pertanto, all'istante $t = 0^-$ il condensatore si comporta come un ramo aperto e l'induttanza si comporta come un corto circuito. La tensione $v_C(0^-)$ e l'intensità della corrente $i_L(0^-)$ si calcolano come segue:

$$v_C(0^-) = v_{R1}(0^-) = R_1 \cdot I = 1 \cdot 10 = 10V$$

$$i_L(0^-) = 0A$$

L'intensità della corrente $i_L(0^-)$ non può che essere nulla, in quanto l'induttanza e la capacità sono collegate in serie tra loro e quest'ultima si comporta come un ramo aperto. Per il principio di continuità della tensione ai capi del condensatore si ha:

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 10V$$

Per il principio di continuità della corrente che attraversa l'induttore, si ha:

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0A$$

Per $t \geq 0$ si fa riferimento al circuito di figura 2, opportunamente modificato **(il generatore reale di corrente è stato trasformato in un generatore reale di tensione).**

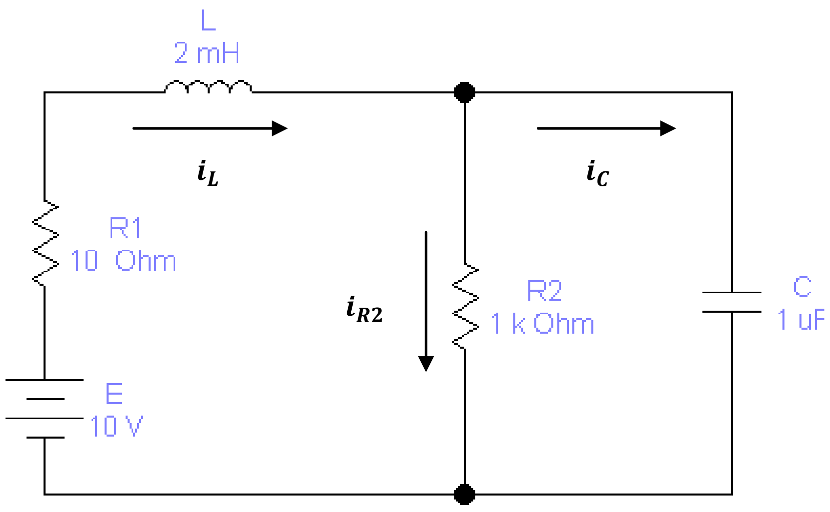

Figura 2. Circuito per il calcolo della tensione $v_C(t)$

Scrivendo le equazioni di Kirchhoff si ha:

$$E - v_{R1}(t) - v_L(t) - v_{R2}(t) = 0 \quad \rightarrow \quad E - v_{R1}(t) - v_L(t) - v_C(t) = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{E - R_1 \cdot i_L(t) - L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} - v_C(t) = 0} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{i_L = i_{R2}(t) + i_C(t) = \frac{v_{R2}(t)}{R_2} + i_C(t) = \frac{v_C(t)}{R_2} + i_C(t) = \frac{v_C(t)}{R_2} + C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}} \qquad (2)$$

Sostituendo la (2) nella (1) si ha:

$$E - R_1 \cdot \left(\frac{v_C(t)}{R_2} + C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}\right) - L \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{v_C(t)}{R_2} + C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}\right) - v_C(t) = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad E - \frac{R_1}{R_2} \cdot v_C(t) - R_1 \cdot C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} - \frac{L}{R_2} \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} - L \cdot C \cdot \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} - v_C(t) = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad L \cdot C \cdot \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + R_1 \cdot C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{L}{R_2} \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{R_1}{R_2} \cdot v_C(t) + v_C(t) - E = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \left(\frac{R_1 \cdot C + \frac{L}{R_2}}{L \cdot C}\right) \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) \cdot \frac{1}{L \cdot C} v_C(t) - \frac{E}{L \cdot C} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \left(\frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C \cdot R_2}\right) \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right) \cdot \frac{1}{L \cdot C} v_C(t) = \frac{E}{L \cdot C}} \qquad (3)$$

La (3) è una equazione differenziale del secondo ordine, a coefficienti costanti, non omogenea.

Ponendo:

$$2 \cdot \alpha = \left(\frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C \cdot R_2}\right), \quad {\omega_0}^2 = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right) \cdot \frac{1}{L \cdot C}$$

la (3) si scrive come segue:

$$\boldsymbol{\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + {\omega_0}^2 \cdot v_C(t) = \frac{E}{L \cdot C}}$$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$\alpha = \frac{10 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^3} = \frac{12 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-6}} = 3 \cdot 10^3$$

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right) \cdot \frac{1}{L \cdot C}} \cong \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} = 22{,}4 \cdot 10^3$$

Come si può notare, $\alpha < \omega_0$ **(risposta sottosmorzata)**

L'equazione differenziale in questione non è omogenea, quindi la soluzione generale è data dalla somma tra la soluzione dell'equazione omogenea associata e un integrale particolare. In formula si ha:

$$\boldsymbol{v_C(t) = v_C(t)^{omogenea} + v_C(t)^{particolare}}$$

La soluzione $\boldsymbol{v_C(t)^{omogenea}}$ si determina come segue:

ponendo:

$$S = \frac{dv_C(t)}{dt}, \quad S^2 = \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2}, \quad si\ assegna\ 1\ alla\ variabile\ non\ derivata, ossia\ v_C(t) = 1$$

l'equazione differenziale omogenea

$$\boldsymbol{\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + {\omega_0}^2 \cdot v_C(t) = 0} \qquad \mathbf{(4)}$$

si scrive come segue:

$$S^2 + \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot S + \boldsymbol{\omega_0}^{\mathbf{2}} = 0 \qquad (5)$$

Si dimostra che per $\alpha < \omega_0$ **(risposta sottosmorzata)** la soluzione della (4) ammette la seguente forma funzionale:

$$v_C(t) = K_1 \cdot e^{S1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{S2 \cdot t} \qquad (6)$$

dove $S_1\ ed\ S_2$ sono soluzioni complesse e coniugate dell'equazione (5), che si determinano nel seguente modo:

$$S_{\frac{1}{2}} = \frac{-2 \cdot \alpha \pm \sqrt{4 \cdot \alpha^2 - 4 \cdot \omega_0{}^2}}{2} = \frac{-2 \cdot \alpha \pm 2 \cdot \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}}{2} =$$

$$= -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0{}^2 - \alpha^2} = (-3 \pm j22{,}2) \cdot 10^3$$

Pertanto, la (6) si scrive:

$$v_C(t) = K_1 \cdot e^{\left(-\square + j\sqrt{\omega_0{}^2 - \alpha^2}\right) \cdot t} + K_2 \cdot e^{\left(-\alpha - j\sqrt{\omega_0{}^2 - \alpha^2}\right) \cdot t} \qquad (7)$$

$$v_C(t) = K_1 \cdot e^{(-3 + j22{,}2) \cdot t} + K_2 \cdot e^{(-3 - j22{,}2) \cdot t} \qquad (8)$$

Per determinare le costanti $K_1\ e\ K_2$ è necessario conoscere le condizioni iniziali:

$$v_C(0^+), \quad \frac{d\, v_C(0^+)}{dt}$$

Ponendo nella (8) $t = 0^+$ si ottengono:

$$v_C(0^+) = K_1 + K_2 \quad da\ cui \quad K_1 = v_C(0^+) - K_2 = 10V - K_2$$

$$\frac{d\, v_C(0^+)}{dt} = K_1 \cdot (-3 + j22{,}2) \cdot 10^3 + K_2 \cdot (-3 - j22{,}2) \cdot 10^3 =$$

$$= \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{i_L(0^+) - i_{R2}(0^+)}{C} = \frac{0 - \frac{v_{R2}(0^+)}{R_2}}{C} = -\frac{v_{R2}(0^+)}{R_2 \cdot C} = -10 \cdot 10^3 V/sec$$

Risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} K_1 = 10V - K_2 \\ K_1 \cdot (-3 + j22{,}2) \cdot 10^3 + K_2 \cdot (-3 - j22{,}2) \cdot 10^3 = -10 \cdot 10^3 V/sec \end{cases}$$

si ha:

$$K_1 = 5 - j0{,}45$$

$$K_2 = 5 + j0{,}45$$

La soluzione cercata è:

$$v_C(t) = (5 - j0{,}45) \cdot e^{(-3+j22{,}2)\cdot t} + (5 + j0{,}45) \cdot e^{(-3-j22{,}2)\cdot t}$$

L'integrale particolare si determina ponendo nell'equazione (3) $v_c(t) = A = costante$.

Dunque si ottiene:

$$\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right) \cdot \frac{1}{L \cdot C} \cdot A = \frac{E}{L \cdot C} \quad \rightarrow \quad A = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 10V$$

$$v_c(t) = A = 10V$$

In definitiva, la soluzione completa dell'equazione differenziale (3) risulta:

$$\boldsymbol{v_C(t) = v_C(t)^{omogenea} + v_C(t)^{particolare}} =$$

$$= (5 - j0{,}45) \cdot e^{(-3+j22{,}2)\cdot t} + (5 + j0{,}45) \cdot e^{(-3-j22{,}2)\cdot t} + 10$$