# Equazioni differenziali a variabili separabili

Le equazioni differenziali a variabili separabili si presentano sotto la forma:

$$A(x) \cdot dx = B(y) \cdot dy \qquad (1)$$

con $A(x)$ e $B(y)$ funzioni continue.

Ponendo:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

e supponendo $B(y) \neq 0$, l'equazione differenziale può essere scritta in forma normale:

$$y' = \frac{A(x)}{B(y)}$$

Siccome $A(x)$ $e$ $B(y)$ sono funzioni continue, entrambe ammettono almeno una primitiva che denotiamo rispettivamente con $a(x)$ $e$ $b(y)$. Pertanto dalla (1) si ottiene:

$$a(x) \cdot dx = b(y) \cdot dy \quad \rightarrow \quad da(x) = db(y)$$

L'uguaglianza tra i due differenziali implica che le funzioni $a(x)$ $e$ $b(y)$ differiscono per una costante arbitraria additiva, quindi si ha:

$$b(y) = a(x) + C$$

Pertanto integrando ambo i membri della (1) si ottiene l'integrale generare dell'equazione differenziale:

$$\int A(x) \cdot dx = \int B(y) \cdot dy$$

**Esempio 1**

$$4xy - 2y' = 0$$

**Soluzione**

Questa è una equazione differenziale a variabili separabili. Infatti possiamo scriverla sotto questa forma:

$$4xy - 2\frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad 4xy = 2\frac{dy}{dx} \quad \rightarrow \quad 2xy = \frac{dy}{dx} \quad \rightarrow$$

$$y' = F(x,y) \quad con \quad F(x,y) = 2xy \quad il\ cui\ dominio \text{ è } R^2$$

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

dove

$$A(x) = 2x \quad B(y) = \frac{1}{y} \quad y \neq 0$$

Per integrazione si ha:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx \quad \rightarrow \quad ln|y| = x^2 + C \quad \rightarrow \quad |y| = e^{x^2+C} = e^C e^{x^2} \rightarrow \quad y = \pm e^C e^{x^2}$$

con

$$K = e^C > 0$$

per cui si ha:

$$y = \pm K e^{x^2}$$

Anche $y = 0$ è soluzione dell'equazione differenziale e non può che essere una soluzione particolare, visto che in questo caso l'equazione differenziale non può assumere soluzioni singolari, in quanto $y = 0$ appartiene sia al dominio di $F(x, y) = 2xy$ sia al dominio di $\frac{\partial F}{\partial y} = 2x$. Detta soluzione particolare si ottiene da quella generale per $K = 0$, ossia per $C \rightarrow -\infty$.

**Esempio 2**

Risolvere l'equazione differenziale

$$y' + 3y = 1$$

con la condizione iniziale

$$y = 0 \;\; per \;\; x = 0$$

**Soluzione**

Trattasi di una equazione differenziale a variabili separabili. Infatti si ha.

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 1 - 3y \;\; equazione\ differenziale\ scritta\ in\ forma\ normale$$

Inoltre possiamo scrivere:

$$\frac{dy}{1 - 3y} = dx \quad equazione\ differenziale\ scritta\ nella\ forma \quad B(y) \cdot dy = A(x) \cdot dx$$

con $B(y) = \frac{1}{1-3y}$ $\quad A(x) = 1$.

purché risulti

$$1-3y \neq 0 \quad \to y \neq \frac{1}{3}$$

Per integrazione si ha:

$$\int \frac{dy}{1-3y} = \int dx$$

e sviluppando i calcoli si ottiene:

$$-\frac{1}{3} \cdot ln(|1-3y|) = x + C \quad \to \quad ln(|1-3y|) = -3 \cdot (x+C)$$

$$\to \quad |1-3y| = e^{-3x-3C} \quad \to 1-3y = \pm e^{-3C} \cdot e^{-3x}$$

Ponendo $K = \pm e^{-3C}$ si ha.

$$y = \frac{1 + K \cdot e^{-3x}}{3}$$

Dalle condizioni iniziali si ricava l'integrale particolare, ossia:

$$1 + K = 0 \quad \to K = -1$$

Pertanto l'integrale particolare risulta:

$$y = \frac{1 - e^{-3x}}{3}$$

**Esempio 3**

Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = \frac{\sqrt{4+y}}{2+x}$$

e determinare la curva integrale passante per il punto $(e-2,\ +2)$.

**Soluzione**

Trattasi di un'equazione differenziale a variabili separabili, scritta nella forma $y' = F(x,y)$. Infatti possiamo scrivere:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{4+y}}{2+x} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{4+y}}=\frac{dx}{2+x}$$

con $x \neq -2, \;\; y \neq -4$

Per integrazione si ha:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4+y}}=\int \frac{dx}{2+x} \quad \rightarrow \quad \int (4+y)^{-\frac{1}{2}}dy=\int \frac{dx}{2+x} \quad \rightarrow \quad \frac{(4+y)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=log(|2+x|)+C$$

$$\rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 2\cdot\sqrt{4+y}=log(|2+x|)+C$$

Ponendo $C=\log K$ con $K>0$ si ha:

$$2\cdot\sqrt{4+y}=log(|2+x|)+\log K \quad \rightarrow \quad 2\cdot\sqrt{4+y}=\log(k\cdot|2+x|)$$

Risolvendo rispetto a $y$ e ponendo $\log(k\cdot|2+x|) \geq 0$ si ha:

$$4+y=\frac{1}{4}\cdot log^2(k\cdot|2+x|) \quad \rightarrow \quad y=\frac{1}{4}\cdot log^2(k\cdot|2+x|)-4 \;\; \textit{soluzione generale}$$

Dalle condizioni iniziali si determina il valore della costante $k$:

$$+2=\frac{1}{4}\cdot log^2(k\cdot|2+e-2|)-4 \quad \rightarrow \quad +2=\frac{1}{4}\cdot log^2(k\cdot e)-4 \quad \rightarrow \quad 12=log^2(k\cdot e)$$

Per la condizione $\log(k\cdot|2+x|) \geq 0$ si ha:

$$12=log^2(k\cdot e) \quad \rightarrow \quad log(k\cdot e)=+\sqrt{12} \quad \rightarrow \quad k\cdot e=e^{\sqrt{12}} \quad \rightarrow \quad k=\frac{e^{\sqrt{12}}}{e}=e^{\sqrt{12}\,-\,1}$$

Pertanto la curva integrale richiesta risulta:

$$y=\frac{1}{4}\cdot log^2\left(e^{\sqrt{12}\,-\,1}\cdot|2+x|\right)-4$$

La funzione $y=-4$ soddisfa l'equazione differenziale proposta ed è soluzione singolare in quanto appartiene al dominio della funzione $F(x,y)$, che è $x \neq -2 \;\; e \;\; y \geq -4$, ma non a quello di $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$, che è $x \neq -2 \;\; e \;\; y > -4$.